

VirtualClass

NT-CGIP-L8-0120



Modelos de *Stocks* con demanda determinística

Por: MBA, M.Sc. Ing. Diego Luis Saldarriaga R.

Esta nota técnica fue escrita por el Profesor Diego Luis Saldarriaga R. de Zonológica S.A.S. El objetivo de esta nota técnica es servir de soporte a los cursos de gestión de inventarios y a cursos de cadena de suministro y operaciones, adicionalmente tiene el propósito también que sea un soporte que fomente la discusión más que ilustrar de forma ortodoxa la manera se solucionar un problema de gestión de *stocks*.

Medellín, Colombia, enero, 2020.

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN.

Control de inventarios con demanda constante

Introducción

Dar respuestas a las siguientes cuatro preguntas básicas: ¿Qué pedir y / o producir?, ¿Cuánto pedir y / o producir?, ¿Cuándo pedir y / o producir? y ¿Cómo pedir y / o producir? es el objetivo central de la gestión de los inventarios. Definir la cantidad a pedir y / o producir puede hacerse a través de modelos determinísticos o probabilísticos.

Existen dos caminos para la gestión de inventarios, los que obedecen a una demanda dependiente y los que se rigen por una demanda independiente.

La cantidad de demanda, los tiempos de abastecimiento y las características de estos condicionan la manera en que se gestionan los inventarios; de estas dos variables se desprenden los modelos de control. Demanda y tiempo pueden ser determinísticos o probabilísticos.

De esta manera la demanda se puede clasificar en demanda conocida (o demanda determinística) y demanda no conocida (o demanda probabilística).

Demanda constante: en el mundo real es muy difícil encontrar este tipo de demandas, las cuales se caracterizan porque no responden fácilmente ante estímulos; por ejemplo, el consumo de sal no responde fácilmente a los efectos de la publicidad.

Demanda determinística: es aquella que es variable pero conocida o se puede predecir con mucha precisión. Este tipo de demandas es típico para reposición de partes que se necesitan para un mantenimiento predictivo y para los reabastecimientos a nivel de demanda dependiente, como los planes de compras arrojados por la programación de requerimientos de producción *MPR (Material Requirements Planning)*. Los productos que deben ser suministrados bajo licitaciones o que son atendidos bajo pedido (hay un plazo prudente para su manufactura) hacen parte de este tipo de demandas. Los abastecimientos de este tipo de demandas son muy precisos, debido al hecho de que la demanda es conocida con anterioridad (aunque es posible que los tiempos varíen por algún problema no controlado de los proveedores).

Tratamiento similar puede dársele a los tiempos, pero sobre éstos se volverá más adelante cuando se estudie la gestión de inventarios bajo incertidumbre.

La Demanda aleatoria: los reabastecimientos se hacen con base en el consumo (que en la gran mayoría de productos es aleatorio). En la práctica hay variables que influyen la mayor o menor demanda de un producto: las variaciones de precios, la competencia, las promociones, la mejora de la calidad y la distribución numérica - sin contar con las variables que tienen que ver con aspectos que no están al alcance de las empresas (como el clima) -. Todos estos factores hacen que la demanda de un producto no sea fácilmente predecible y como consecuencia de esto la demanda asume una distribución probabilística sobre la cual se pueden determinar los modelos de control.

Las características de la demanda D y de los tiempos de abastecimiento LT establecen el sistema de control de los inventarios.

A continuación, se estudiará el tratamiento de la demanda determinística donde la demanda es constante y el *lead time* es constante. Una aplicación del *EOQ (Economic Order Quantity)* nos permite gestionar este tipo de demandas.

De esta manera entonces en la vida real los patrones de demanda se inscriben en alguno de los siguientes cuatro patrones:

1. Determinísticos y constantes, es decir mantienen constantes con el tiempo.

2. Determinístico y variable.
3. Probabilístico y estacionario en el tiempo.
4. Probabilístico y no estacionario en el tiempo.

La situación del numeral uno es la menos parecida a la realidad y es fácil de gestionar y la situación del numeral cuatro es la que en general se vive en el entorno real y presenta un grado de dificultad llegar a establecer modelos que la gestionen de manera adecuada.

En la vida real a los responsables de gestionar los inventarios les puede asaltar la pregunta sobre cómo definir qué patrón de demanda siguen los datos bajo estudio, para que una vez aclarado que aproximación de la demanda siguen los datos se puedan construir los modelos de reabastecimiento más adecuados.

Un indicador que nos da luces es el índice de variación y el coeficiente de variabilidad.

Gestión de inventarios bajo demanda constante

Realmente son muy pocas las áreas de negocio que no están sujetas a alguna incertidumbre. En lo que tiene que ver con la demanda la gestión de inventarios bajo condiciones siempre conocidas se inscriben únicamente a gestionar dos elementos: el costo de generar las órdenes de compra y el costo de mantener los inventarios, entonces la mejor política para esta clase de productos la obtenemos de optimizar esos dos tipos de costos usando el modelo de cantidad económica de pedido *EOQ*, cuyo modelo básico fue formulado por Ford Harris (1915).

Supuestos

Para la aplicación de este modelo es necesario que la demanda del producto sea constante y conocida con certeza durante todo el periodo y que el plazo de entrega (desde el pedido hasta el recibo) sea constante; asimismo el costo de mantenimiento del inventario se basa en el inventario promedio, los montos de los pedidos o de preparación también son constantes y los lotes entran al sistema al mismo tiempo (generalmente al principio del periodo) de inmediato (tiempo de reposición igual a cero o un valor constante conocido) y completos (no se aceptan entregas parciales ni hay ventas perdidas), no es posible descuentos por volumen, todas las demandas del producto serán satisfechas y por último, no existirá agotamientos de inventarios si los pedidos se colocan en el momento oportuno. Estos supuestos - como ya se deducirá - no son realistas, pero representan un punto de partida para entender los modelos más complejos.

La figura 1 representa estos supuestos.

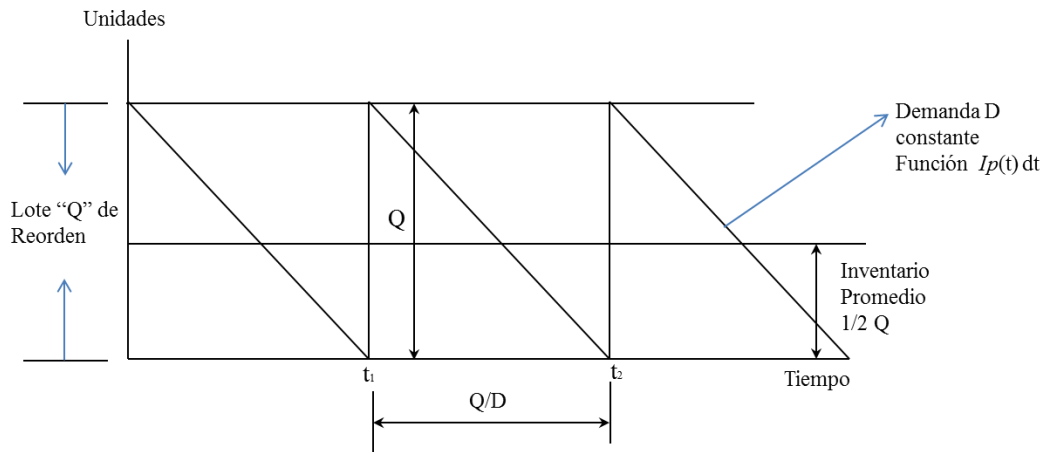


Figura No.1 sistema de inventario.

De la figura 1 se puede deducir que una vez el inventario llegue a cero se recibe una orden por una cantidad igual a Q . Además, el tiempo entre reabastecimientos es igual a Q/D (en dónde D es la demanda anual). Esto quiere decir que el número de órdenes que se colocarán en un año es igual a D/Q .

Según la figura 1 la suma del área debajo de la función de inventarios $I_p(t) dt$ representa el inventario en todo el periodo de tiempo y el inventario promedio I_p entre el tiempo $t = t_1$ y un tiempo $t = t_2$, donde $t_2 > t_1$ está representado como:

$$I_p = \frac{\int_{t_1}^{t_2} I_p(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} I_p(t) dt}{(t_2 - t_1)}$$

I_p es una función de densidad del *stock* con respecto al tiempo y para este caso de demanda constante el inventario promedio es similar al área de uno de los triángulos que representan un ciclo de abastecimiento ($A = \text{base} \times \text{altura} / 2$) dividido por el tiempo transcurrido entre t_1 y t_2 , es decir:

$$\frac{\frac{Q}{D} Q}{2} = \frac{Q^2}{2D} \quad (1)$$

Y como el tiempo transcurrido entre t_0 y t_1 es Q/D al dividir (1) entre Q/D queda demostrado que el inventario medio es igual a $Q/2$.

$$\frac{Q^2}{2D} = \frac{Q}{2} \frac{Q}{D}$$

Cálculo del lote de pedido económico (*EOQ: Economic Order Quantity*).

En este modelo básico la cantidad a pedir Q es constante debido a que todos los parámetros son conocidos no hay incertidumbre, es decir que el efecto del tiempo no los afecta; además todos los supuestos mencionados hacen que lo mejor sea reponer el inventario una vez la posición actual de *stock* este en cero.

Como se vio anteriormente, una de las decisiones básicas del administrador de los inventarios es decidir cuánto pedir. La respuesta a dicha pregunta para este modelo es un adecuado balance entre los costos de ordenar y los de mantener o llevar los inventarios, de esta manera se puede definir la cantidad económica de pedido *EOQ* como aquella en donde se obtiene el costo mínimo de lanzar un pedido y mantener inventarios o la cantidad que nos permite obtener el mínimo costo total; un aumento de la cantidad permite una disminución en el número de pedidos y consecuentemente una reducción en el costo de preparación de esas órdenes, pero en caso contrario cuando aumenta la cantidad del pedido el costo de mantener esas existencias aumenta.

El costo total de producir o comprar tiene asociados cuatro tipos de costos a saber: costo de compra, costo de llevar o mantener el inventario, el costo de ordenar y costo de escasez. A continuación, se estudiará más en detalle cada uno de ellos.

Laminados Duarte S.A. (LDSA) es una empresa que produce elementos metálicos y que para sus operaciones debe comprar láminas de acero que después - en el proceso productivo - son cortadas dependiendo de los productos acabados demandados. LDSA está interesada en utilizar el modelo *EOQ* para el perfeccionamiento de los tamaños de lotes de compra de uno de sus materiales: láminas estándar; cabe anotar que el precio de la tonelada de láminas es de USD80 y espera utilizar para el próximo periodo 21 mil toneladas.

Costo de la Compra: este costo no es más que el precio unitario c por la cantidad a demandar D en el año.

$$\text{Costo de comprar} = c \times D$$

Donde:

c = Precio Unitario.

D = Demanda Promedio Anual.

Para el caso de LDSA el costo de la compra es $80 \times 21.000 = \text{USD}1.680.000$.

Costo de llevar o Mantener Inventarios en el Periodo de un Año: este costo está relacionado con el costo de oportunidad, el costo de riesgo y el costo de almacenamiento en que se incurre cuando se mantienen inventarios a lo largo del tiempo.

- El Costo de Oportunidad: suponga que Laminados LDSA tiene invertidos en inventarios USD2.000.000. Tenga en cuenta que siempre existen dos opciones para LDSA: tener el inventario o no tenerlo; en el caso de que decida no tenerlo la empresa puede colocar ese dinero en otra inversión

más rentable. Digamos una inversión que le rente 16% anual, entonces $16\% \times 2.000.000 = \text{USD}320.000$, este exactamente es el costo de oportunidad para LDSA. Utilizando este cálculo podemos obtener el costo de oportunidad por tonelada de la siguiente manera.

- $\text{USD}2.000.000 / 80 = 25$ mil toneladas, quiere decir que LDSA mantiene un inventario de 25. Mil toneladas de láminas estándar en todo momento.
- Ahora $\text{USD}320.000 / 25.000 = \text{USD}0.08 / \text{ton}$. Este es el costo de oportunidad por tonelada.
- Costo de Riesgo: en este rubro clasifican los costos de seguros, mermas, deterioros y obsolescencia. LDSA tiene contratado un seguro contra incendio con una prima anual de USD2 mil y no tiene cubrimientos contra robos ni mermas, pues en su caso no son aplicables porque sus productos no se pueden robar fácilmente por su peso y condiciones de manipulación. En este ejemplo este rubro es casi despreciable, pero en productos de alto valor por unidad y tamaño pequeño puede ser un monto considerable. En el caso del negocio del *retail* las pérdidas desconocidas (por pérdidas, robos, mermas, daños y averías) pueden llegar hasta el 1.8% de las ventas, cifras muy similares a las utilidades netas muy típicas en este tipo de negocios.
- Costo de Almacenamiento: los bienes en inventario hay que almacenarlos y custodiarlos, esto tiene costos asociados como costos de personal, equipos de manipulación de materiales (tales como montacargas), seguros de los edificios, costo de oportunidad de los inmuebles, conteos y cuidados particulares del producto, por mencionar sólo unos pocos. LDSA ha establecido que por diferentes niveles de lotes de 1.500, 2 mil, 3 mil, 5 mil, 10 mil y 21 mil toneladas, su costo de almacenar es de 500, 600, 700, 800, 900, 1.000 dólares por cada tamaño de pedido. Los valores que debe asumir LDSA para mantener inventarios se pueden ver en la Tabla No.1.

Tamaño de Pedido	Costo almacenamiento	Oportunidad (0,08)	Costo de Mantener el Inventario
1.500	500	120	620
2.000	600	160	760
3.000	700	240	940
5.000	800	400	1.200
10.000	900	800	1.700
21.000	1.000	1.680	2.680

Tabla No.1 Costos de mantener inventarios para LDSA.

Los datos se pueden apreciar en la Figura No.2.

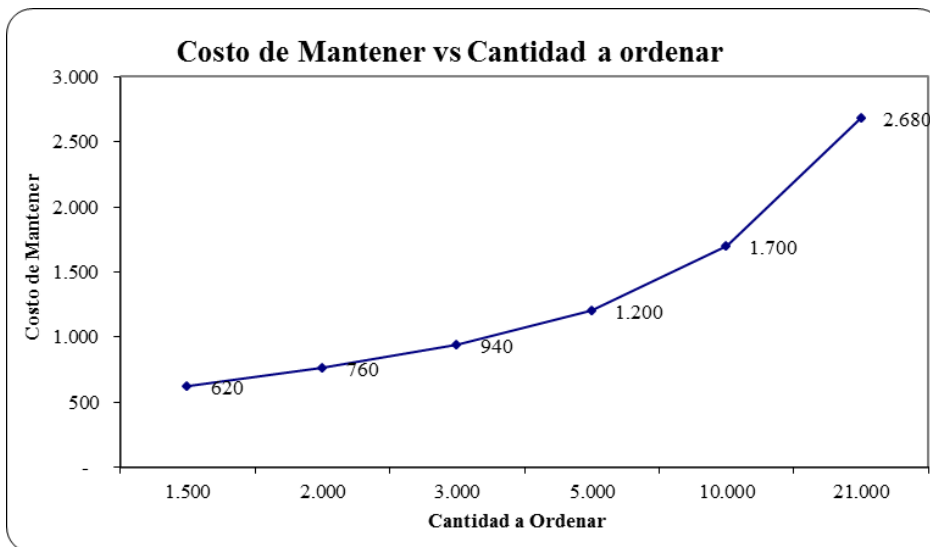


Figura No.2 Costo de mantener inventario.

Otra manera para el cálculo del costo de mantener inventarios consiste en calcular una cifra porcentual que debe ser aplicada al valor de los inventarios para obtener así el costo de llevar los inventarios. Suponga que LDSA ha calculado sus costos en forma porcentual como sigue:

Costo de Oportunidad	16%
Costo de Almacenar	6%
Costo de Obsolescencia	3%
Costo de Deterioro y Mermas	0,5%
Total	25,5%

Esto significa que a LDSA le cuesta cada año un 25% mantener sus inventarios, es decir que si mantiene USD100 en inventarios, cada año habrá gastado USD25 en administrar esas cantidades.

Luego se multiplica esta cifra por la inversión en inventario promedio por tamaño de lote resultando el importe pagado por LDSA para mantener sus inventarios.

Tamaño de pedido	1.500	2.000	3.000	5.000	10.000	21.000
Número medio de toneladas en almacén	750	1.000	1.500	2.500	5.000	10.500
Inversión en inventario (\$)	\$60.000	\$80.000	\$120.000	\$200.000	\$400.000	\$840.000
Inversión en Inventario (%)	25,5%	25,5%	25,5%	25,5%	25,5%	25,5%
Costo de mantener inventarios	\$15.300	\$20.400	\$30.600	\$51.000	\$102.000	\$214.200

Costo de Ordenar: este costo lo componen rubros como comunicaciones, administración, costo financiero de la estrategia de pagos, sistemas de información, personal del departamento de compras, equipos del departamento de compras (fotocopiadoras, fax), papelería, costos bancarios, documentación legal y aduanas, etc. LDSA ha estimado que todos los costos asociados con ordenar son de USD90 por pedido y en consecuencia el número de pedidos en el año de acuerdo al tamaño de lote es 14, 11, 7, 4, 2 y 1. De esta manera los costos de colocación de pedidos asociados con cada tamaño del lote, se aprecia en la Tabla No.2.

Cantidad	Costo por Orden	# de Ordenes en un Año	Costo de Ordenar
1.500	90	14	1260
2.000	90	11	990
3.000	90	7	630
5.000	90	4	360
10.000	90	2	180
21.000	90	1	90

Tabla No.2 Costos de ordenar por tamaño de pedido

Cada que aumente el tamaño del lote es lógico que el número de pedidos baje, esto se muestra en la Figura No.3.

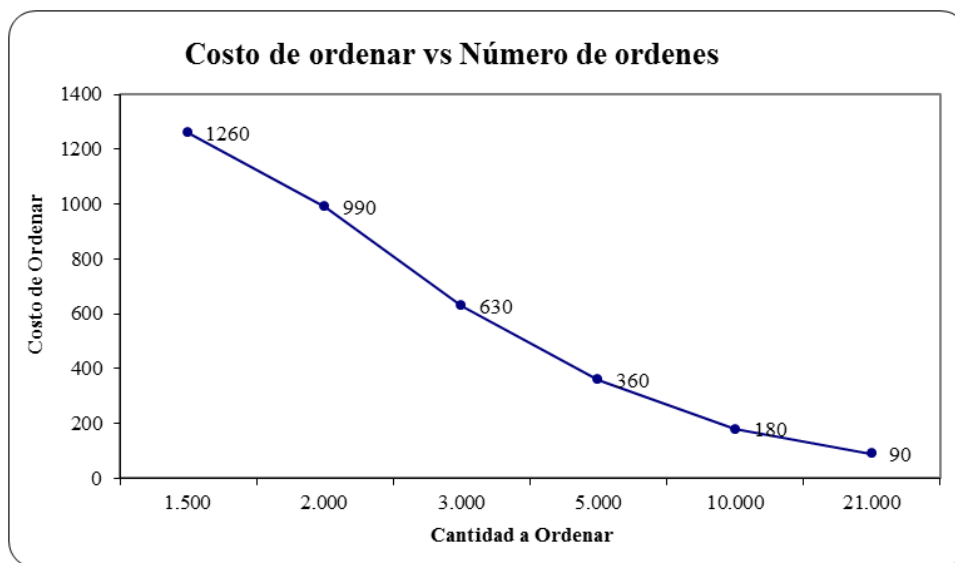


Figura No.3 Costo de ordenar de acuerdo al tamaño del pedido.

Una deducción matemática para el cálculo del *EOQ* es la siguiente:

Colocando todos los componentes como una ecuación se tiene:

$$\text{Costo Total} = \text{Costo Anual de la Compra} = c \times D \quad (2)$$

$$+ \text{Costo Anual de Mantener Inventarios} = \frac{Q}{2} \times H \quad (3)$$

$$+ \text{Costo Anual de Ordenar} = \frac{D}{Q} \times S \quad (4)$$

$$+ \text{Costo de escasez} = Ue \times Ce \quad (5)$$

El costo total es la suma de las ecuaciones 2, 3, 4 y 5.

$CT = (6.4) + (6.5) + (6.6) + (6.7)$, suponiendo que no hay escasez.

$$CT = C \times D + \frac{Q}{2} \times H + \frac{D}{Q} \times S \quad (6)$$

Donde:

D = Demanda anual en unidades.

c = Costo unitario de los artículos.

Q = Cantidad de lote a pedir.

S = El costo de preparación de un pedido.

H = Costo de mantener una unidad al año.

$Q/2$ = El inventario promedio a tener en el año.

Ue = Unidades en escasez

Ce = Costo de escasez por unidad

El costo total en el periodo de un año para LDSA es la suma de los costos de ordenar y los costos de mantener inventarios como se resume en la Tabla No.3.

Tamaño de Pedido	Costo de Mantener	Costo de Ordenar	Costo Total
1.500	620	1260	1.880
2.000	760	990	1.750
3.000	940	630	1.570
5.000	1.200	360	1.560
10.000	1.700	180	1.880
21.000	2.680	90	2.770

Tabla No.3 Costo total para LADSA.

Gráficamente ver Figura No.4.

Costos de Mantener y Ordenar

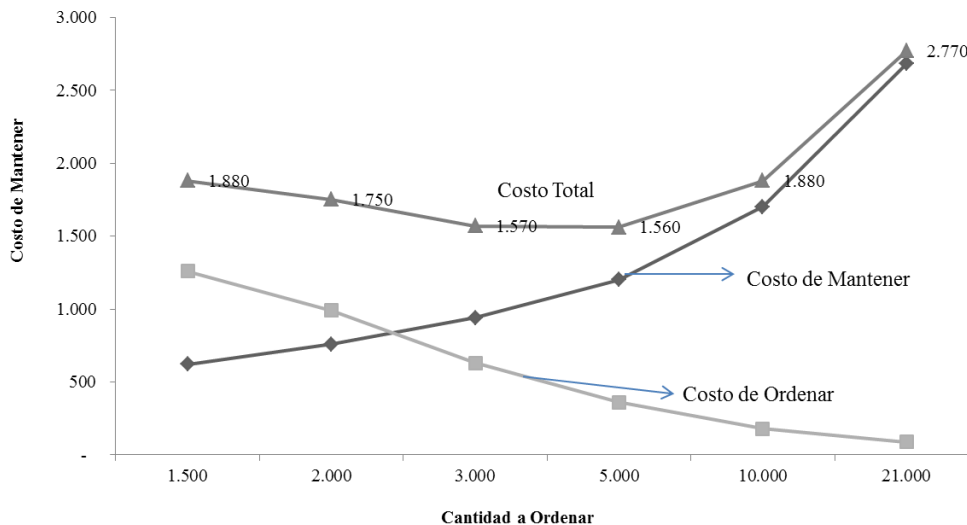


Figura No.4 Costo total por tamaño de lote de compra.

Un aumento de la cantidad a pedir permite una disminución en el número de pedidos y consecuentemente en el costo de preparación de esos pedidos, pero en caso contrario cuando aumenta la cantidad del pedido el costo de mantener esas existencias se eleva, entonces el menor costo se obtiene en donde se interceptan las curvas de costo de ordenar y el costo de mantener inventarios y ese sería el tamaño Q óptimo del lote.

El valor óptimo de Q es el punto donde el costo total es mínimo, es decir en el que la pendiente de la curva de costo total es cero; entonces aplicando cálculo y derivando CT con respecto a Q y luego igualando esta derivada a cero se tiene¹

¹ Otra manera de obtener el Q óptimo es igualando las ecuaciones de costos de ordenar y costos de mantener inventarios, como se muestra a continuación.

$$\frac{d(CT)}{dQ} = 0 + \frac{H}{2} + \left(\frac{-DS}{Q^2}\right)$$

$$\frac{d(CT)}{dQ} = 0$$

$$\frac{DS}{Q^2} = \frac{H}{2}$$

$$2DS = H \times Q^2$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{H}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

(7)

Aplicando 6.9 el Q óptimo para LDSA es:

$$Q_{lds} = \sqrt{\frac{2 * 21.000 * 90}{25,5\% * 80}} = 430 \text{ Toneladas}$$

Número de pedidos en el año

Puede ser de interés saber cuántos pedidos se deben colocar durante el año Np y el tiempo que transcurre entre pedidos T .

$$\frac{D}{Q} \times S = \frac{Q}{2} \times H$$

Despejando Q

$$\frac{2DS}{Q} = Q \times H$$

$$2DS = Q^2 \times H$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{H}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

$$Np = \frac{\text{DemandaAnual}}{\text{CantidadOpima}}$$

$$Np = \frac{D}{Q} \quad (8)$$

Tiempo entre Pedidos

$$T = \frac{\text{Número de días al año}}{Np} \quad (9)$$

Ahora suponga que LDSA trabaja 340 días al año y calcule Np y T para LDSA.

$$Np = \frac{21.000}{430} = 49 \text{ pedidos por año}$$

$$T = \frac{340 \text{ días}}{49} = 6,9 \text{ días entre pedidos}$$

El costo total CT para LDSA es:

$$CT = C \times D + \frac{Q}{2} \times H + \frac{D}{Q} \times S \quad (10)$$

$$CT = 80 \times 21.000 + \frac{430}{2} \times 25,5\% + \frac{21.000}{430} \times 90 = \text{USD}1,688,781$$

Hasta ahora lo que se ha hecho es aplicar los siguientes cinco pasos para obtener la cantidad económica de pedido:

1. Representar por medio de una ecuación el costo de preparar pedidos.
2. Representar en una ecuación el costo de mantener los inventarios.
3. Como el mínimo costo es donde se igualan los dos costos, el siguiente paso es igualar las dos ecuaciones anteriores.
4. Resolver la ecuación y despejar Q .
5. Obtener el costo total.

Ya se tiene entonces la respuesta de cómo calcular Q óptimo para el tipo de demanda estudiada, ahora queda la pregunta de cuándo ordenar, dado que este modelo simple supone una demanda y un plazo constante no se necesita *stock* de seguridad y el punto del nuevo pedido es:

$$s = d \times L \quad (11)$$

Donde:

d = demanda promedio diaria (constante).

L = plazo de entrega en días (constante).

En el caso en que la demanda y el plazo no sean constantes necesitaríamos un inventario de seguridad; este caso se estudiará más adelante.

Casos en los que No Aplica el Modelo

Como ya se dijo, este modelo es irrealista, pero por su sencillez era una buena introducción a los modelos de inventarios más complejos. A continuación, se detallan algunos casos en que no es posible su aplicación:

- Aquellos artículos que se fabriquen bajo pedido.
- Cuando los costos de mantener el inventario H sean muy bajos. Esto se puede deber a dos fenómenos: que el costo del dinero sea igual a cero (el cual no es el caso en muchas economías) y que la tasa de demanda de un artículo sea aproximadamente igual a la tasa de abastecimiento (entregas más frecuentes).
- Cuando predomine el lote técnico (cuando por prescripción la máquina debería fabricar siempre lotes de 100 unidades, por ejemplo).
- Cuando el proceso sea lo suficientemente flexible para que el costo de cambio (*set up*²) y el costo de pedido S sean muy bajos.
- En general, cuando el costo de ordenar es muy pequeño frente al costo de mantener inventarios.

Existen algunas variantes del modelo original *EOQ*, las cuales son:

- Modelo *EOQ* o Lote Económico con abastecimiento gradual.
- Modelo *EOQ* o Lote Económico con restricciones de almacenamiento.
- Modelo *EOQ* o Lote Económico con lotes de transferencia o sub-lotes o entregas parciales, cuando un lote de producción o de compra puede ser entregado por partes o sub-lotes.
- Modelo *EOQ* o Lote Económico ante una oferta de escalas de precio por volumen.

Para estudio detallado de estas variantes consulte Saldarriaga, 2014.

Bibliografía

- Gerencia de Inventarios & Planeación de Producción, soluciones simples a problemas complejos, Diego Luis Saldarriaga, edita Zonalogística, Bogotá 2014.
- Ford, Harris. *Operations and Cost, Factory Management Series* (Chicago: A. W. Shaw Co., 1915), p.p. 48-52

² *Setup* es el tiempo y los costos en que se incurren desde que se fabrica la última pieza buena de lote anterior hasta que se elabora la primera pieza buena del próximo lote. Este factor incluye costos de materiales, desperdicios y costos de mano de obra necesarios para hacer los cambios.

- Newton., R. A. (2007). *Optimization Modelling: A Practical Approach*. CRC Press.
- Sipper Daniel y Robert L. Bulfin Jr. *Planeación y Control de la Producción*, Mc Graw Hill, México, D.F, 1998.
- Silver, Edward A., David F. Pyke y Rein Paterson. *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*. 3ra. Edición. John Wiley & Sons Inc. New York, 1998.
- Silver, E.A, & H.C Meal (1973). *A Heuristic or Selecting Lot Size Quantities for the case of a Deterministic Time Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment*, *Production and Inventory Management Journal*, 14(2), 64-74.
- Taha, Hamdy A. *Investigación de Operaciones*. 9na Edición. Pearson Educación. México, 2012.
- Vidal Holguín, Carlos Julio. *Fundamentos de Control y Gestión de Inventarios*. Programa Editorial Universidad del Valle, 2010.